DOI：10.13849/j.issn.1006-6578.2025.01.066

# 张拉整体结构形态生成泛函及其变分

张志宏[1]，王新冉[1]，张明山[2]，王振华[3]
（1. 上海师范大学 建筑工程学院，上海 201418；2. 浙江大学 建筑工程学院，浙江 杭州 310058；
3. 浙江树人学院 城建学院，浙江 杭州 310015）

**摘　要**：在探索张拉整体结构问题的过程中，尝试提出了形态生成控制泛函及其变分原理. 突破传统的形态分析方式，将形、态和外荷载有机地结合在一起，考虑它们从起点开始相互作用并共同生成形态的过程. 研究发现，结构形态生成过程始终遵循该泛函，因此可将其视为研究结构形态问题的控制泛函之一. 通过以张拉整体模块和静定结构形态为具体算例，进一步验证了该形态生成泛函的广泛适用性.

**关键词**：张拉整体结构；结构形态；形态生成；控制泛函；变分
**中图分类号**：TU394　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1006-6578(2025)01-0066-05

# Functional and variation for morphogenesis of tensegrity structures

ZHANG Zhi-hong[1], WANG Xin-ran[1], ZHANG Ming-shan[2], WANG Zhen-hua[3]
(1. *College of Civil Engineering, Shanghai Normal University, Shanghai* 201418, *China*;
2. *College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou* 310058, *China*;
3. *College of Urban Construction, Zhejiang Shuren University, Hangzhou* 310015, *China*)

**Abstract**: This paper attempts to propose the control functional and its variational principle in the morphogenetic process of tensegrity structures. The authors break through the traditional morphology method by organically combining the shape, state and external loads with the structural system, considering the process in which they interact with each other and co-generate the morphology from the starting point. Research has found that in the process of structural morphogenesis, this functional is always workable, so it can be regarded as one of the control functional for studying structural morphology. The wide applicability of control functional is validate by taking the tensegrity module and statically determinate structure as examples.

**Key words**: tensegrity structures; structural morphology; morphogenesis; control functional; variation

FULLER[1] 创造了“张拉整体”一词，随后，SNELSON[2] 创造了首个张拉整体结构，其由连续受拉的索和离散受压的杆构成. 张拉整体结构因其轻巧灵活的特性，有助于丰富建筑形态的多样性. 在实际工程中，张拉整体结构设计所面临的主要挑战在于形态优化，包括预应力设计、拓扑几何和形状几何生成等方面. 然而，有关张拉整体结构形态生成方面的基础理论尚未成熟.

在最初的凸多面体刚性问题领域，学者们从离散数学的角度出发，提出了一系列泛函，随后逐步拓展至对张拉整体结构的研究. GLUCK[3] 通过单变量泛函 $\sum \omega L_i$ 证明了几乎所有单连通的闭合曲面是刚性的. CONNELLY[4] 在单变量泛函 $\sum \omega L_i$ 基

**收稿日期**：2023-10-19.
**基金项目**：上海市自然科学基金项目(13ZR1430500).
**作者简介**：张志宏(1974—)，男，山东昌邑人，博士，研究员. 主要从事大跨空间结构和结构风工程研究. E-mail：zzh@shnu.edu.cn

础上引入能量泛函 $E(q)=1/2\sum_{i,j}\omega_{ij}(q_i-q_j)^2$，其中 $\omega_{ij}$ 被定义为应力，但应该为力密度. 随后，KAZUMA 和 NOGUCHI[5] 提出的经典力密度法泛函 $\sum_i \omega_i L_i^2$，与 CONNELLY[4] 单变量能量泛函等价. HANAOR[6-8] 和 MOTRO[9,10] 对张拉整体结构的力学可行性进行了理论研究. ROTH[11]、WHITELEY[11-13] 和 CONNELLY[12-14] 等学者对张拉整体的稳定性进行了深入研究，提出了单变量势能泛函，并在刚度和稳定性的一般理论方面取得了重要成果. 其中，CONNELLY 和 TERRELL[14] 从双面对称性角度出发，研究了张拉整体结构的全局刚性问题，通过将节点坐标作为变量的泛函 $Q(p)=\sum_{i,j}\omega_{ij}|p_i-p_j|^2$，得到了棱柱型张拉整体结构形态问题的完备解析解.

上述关于张拉整体找力与找形问题的泛函均为单变量. VASSART 和 MOTRO[15] 将多参数找形分析方法应用于张拉整体中，并采用参数分析方法求解张拉整体结构形态生成问题. 他们同时考虑了预应力和节点坐标的变化，这实际上已经是二类变量的变分. 尽管该论文未深入指出形态生成泛函的具体性质，但其方法为解决此类问题提供了重要的思路. DAVIDE 和 ANDREA[16]，提出泛函 $\sum_{\text{members}} t_i l_i=0$，但未明确说明是二类变量泛函，他们的分析揭示了张拉整体结构效率不高的内在原因. 这些研究缺乏对形态生成过程的充分分析，而这恰是形态生成问题的关键.

本文探讨了结构形态生成过程，以结构体系遵循的形态生成泛函作为结构形态生成分析的基础，并详细推导该泛函的变分. 以三棱柱张拉整体结构和简单的静定结构形态为例，验证了该泛函的适用性.

## 1 结构形态生成过程

宇宙的起源或生物个体的发展，均源自胚胎或种子的发育过程. 这启示了自然或人造物形态生成的理论起点实际上是一个宏观上无限小点. 如图 1 所示，结构形态的生成始于拓扑几何和控制信息的相互作用，随后逐渐演化为包含了拓扑和形状几何、材料特性以及控制信息等多方面因素的宏观物体.

结构设计的目标在于建立稳定的结构体系. 自平衡特性使张拉整体结构在特定的几何形状下能够承受载荷并保持稳定，这表明张拉整体结构的形和态密切关联. 在结构形态生成过程中，形和态相互耦合于构件形心主轴的方向矢量. 态即力或应力，态依存于形. 形为外，态为内. 形与态既相互独立又可相互依存. 作者指出，在结构形态生成过程中，可能存在某种特定的规律性. 然而，值得注意的是，需要将结构形态生成的问题与生物学中的形态生成问题加以区分.

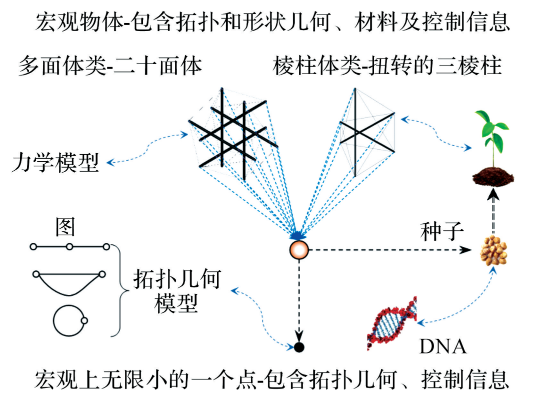


**图 1 结构形态生成的起点**

Fig. 1 Starting point of structural morphogenesis

## 2 结构形态生成分析的基础

在张拉整体结构的形态分析问题中，拓扑几何信息确定，相应的关联矩阵也随之确定. 这一关联矩阵可与不同的初始物理量组合，形成具有相应含义的平衡矩阵. 不同形式的平衡矩阵在本质上是等价的，它们之间可以相互转换. 接下来，将以构件内力和力密度的表示形式分别描述形态生成泛函，并详细推导该泛函的变分.

### 2.1 以构件内力表示的形态生成泛函

记结构平衡矩阵为 $\boldsymbol{A}$，所有单元内力矢量为 $\vec{\boldsymbol{\beta}}$，所有节点外荷载矢量为 $\vec{\boldsymbol{F}}$. 以构件内力为未知量的平衡方程为

$$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{\beta}}=\vec{\boldsymbol{F}} \tag{1}$$

记所有节点的 $x$、$y$、$z$ 坐标矢量为 $\vec{X}$、$\vec{Y}$、$\vec{Z}$，所有单元长度矢量 $\vec{\boldsymbol{L}}=\{l_1,\cdots l_i,\cdots\}^{\mathrm{T}}$，结构线形图的关联矩阵 $C^{\mathrm{T}}$. 则整体坐标系下 $x$、$y$、$z$ 方向平衡方程见式(2).

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_x\\ \boldsymbol{A}_y\\ \boldsymbol{A}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\operatorname{diag}(\cos\vec{\alpha}_x)\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\operatorname{diag}(\cos\vec{\alpha}_y)\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\operatorname{diag}(\cos\vec{\alpha}_z)\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{A}_x=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\operatorname{diag}(\cos\vec{\alpha}_x)\\ \boldsymbol{A}_y=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\operatorname{diag}(\cos\vec{\alpha}_y)\\ \boldsymbol{A}_z=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\operatorname{diag}(\cos\vec{\alpha}_z)\end{cases} \tag{2}$$

式(2)可视为分块平衡矩阵的矩阵乘积分解形式，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 只包含拓扑几何信息，$\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_x)$ 包含形状几何信息；$\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 仅包含内力或应力信息. 其中，$\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_x)=\mathrm{diag}(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{X}})\mathrm{diag}(\vec{\boldsymbol{L}})^{-1}$ 表示单元构件对 $x$ 轴方向余弦 $\cos\alpha_{ix}$(注：$i$ 为构件单元编号)组成的对角矩阵. 由式(1)、(2)可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_x\vec{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_x)\vec{\boldsymbol{\beta}}=\vec{\boldsymbol{F}}_x\\&\Rightarrow(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_x)\vec{\boldsymbol{\beta}}=\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x\end{aligned}\tag{3}$$

则 $(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{Y}})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_y)\vec{\boldsymbol{\beta}}=\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_y$；$(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{Z}})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_z)\vec{\boldsymbol{\beta}}=\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_z$. 将上式相加，再有 $\Delta\vec{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{X}}$，$\Delta\vec{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{Y}}$，$\Delta\vec{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{Z}}$、$l_i^2=\Delta x_i^2+\Delta y_i^2+\Delta z_i^2$，$\Delta x_i$、$\Delta y_i$、$\Delta z_i$ 为第 i 根构件左右结点的坐标差，可得

$$\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}}=\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x+\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_y+\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_z\tag{4}$$

记 $\Gamma(\vec{\boldsymbol{L}},\vec{\boldsymbol{\beta}})=\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}}-(\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x+\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_y+\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_z)$ 为以构件内力表示的形态生成泛函.

### 2.2 以构件力密度表示的形态生成泛函

记力密度对角矩阵 $\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\vec{\boldsymbol{q}})$，力密度矢量 $\vec{\boldsymbol{q}}=\{q_1,\cdots q_i,\cdots\}^{\mathrm{T}}$，其中，$q_i=\beta_i/l_i$. 再有力密度分块平衡矩阵 $\boldsymbol{D}_x=\boldsymbol{D}_y=\boldsymbol{D}_z=\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}$. 以构件力密度为未知量的平衡方程为

$$\boldsymbol{D}_x\vec{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{F}}_x\tag{5}$$

式(7)两端均左乘 $\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}$，可得

$$\begin{aligned}&\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_x\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x\Rightarrow\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{X}}=\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x\\&\Rightarrow(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{X}})=\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x\end{aligned}\tag{6}$$

则 $(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{Y}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{Y}})=\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_y$；$(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{Z}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{Z}})=\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_z$. 相加得

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{X}})+(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{Y}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{Y}})+(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{Z}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{Z}})=\\&(\Delta\vec{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\Delta\vec{\boldsymbol{X}})+(\Delta\vec{\boldsymbol{Y}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\Delta\vec{\boldsymbol{Y}})+(\Delta\vec{\boldsymbol{Z}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\Delta\vec{\boldsymbol{Z}})=\\&\sum_{i=1}^{n}q_i(\Delta x_i^2+\Delta y_i^2+\Delta z_i^2)=\sum_{i=1}^{n}q_il_i^2\\&=\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x+\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_y+\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_z\Rightarrow\\&\sum_{i=1}^{n}q_il_i^2=\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x+\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_y+\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_z\Rightarrow\\&\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{L}}=\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x+\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_y+\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_z\end{aligned}\tag{7}$$

记，$\Pi(\vec{\boldsymbol{L}},\vec{\boldsymbol{q}})=\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{L}}-(\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x+\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_y+\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_z)$ 为以力密度表示的形态生成泛函.

### 2.3 两种形态生成泛函的等价关系

上述两种形态生成泛函之间的形式本质上等同，相应的平衡方程之间存在相互转换的过程，具体如下

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{D}_x\vec{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{X}})\vec{q}=\\&\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{X}})(\mathrm{diag}(\vec{\boldsymbol{L}}))^{-1}\vec{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_x)\vec{\boldsymbol{\beta}}=\\&\vec{\boldsymbol{F}}_x\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_x\vec{\boldsymbol{\beta}}=\vec{\boldsymbol{F}}_x\end{aligned}\tag{8}$$

将 $(\vec{\boldsymbol{L}}-\boldsymbol{0})^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}}$ 视为形态生成过程中内力所做的功，其中 $\boldsymbol{0}$ 表示形态生成的起点，$\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x+\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_y+\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_z$ 则代表形态生成过程中外力所做的功. 在外荷载作用下，结构达到平衡状态，形态生成泛函 $\Gamma(\vec{\boldsymbol{L}},\vec{\boldsymbol{\beta}})=\Pi(\vec{\boldsymbol{L}},\vec{\boldsymbol{q}})=0$，这表明形态生成过程中内力所做功的总和必然等于外力所做功的总和.

在不考虑外荷载或外荷载为零时，结构达到平衡状态，$\Gamma(\vec{\boldsymbol{L}},\vec{\boldsymbol{\beta}})=\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}}=0$，$\Pi(\vec{\boldsymbol{L}},\vec{\boldsymbol{q}})=\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{L}}=0$. 这表明自应力若存在，则受拉构件的长度与自应力的乘积之和将必然等于受压构件的长度与其自应力的乘积之和.

值得注意的是，该形态生成泛函与其他学者提出的单变量泛函有所区别，因为形态生成泛函涉及两类独立变量. 在这两类变量中，构件的长度和内力场是相互独立的，这意味着在形态生成过程中，“形”和“态”也是相互独立的.

## 3 结构形态生成泛函的变分

对于无外荷载自平衡体系的自平衡状态，由形态生成泛函 $\Gamma(\vec{\boldsymbol{L}},\vec{\boldsymbol{\beta}})=\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}}=0$，考察一阶变分 $\delta(\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}})$ 和二阶变分 $\delta^2(\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}})$，可得出一些有趣的结果.

### 3.1 一阶变分

对于一阶变分 $\delta(\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}})=\delta\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}+\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\vec{\boldsymbol{\beta}}$，第一项：

$$\begin{aligned}&\delta\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}=\\&\begin{pmatrix}(\delta(\Delta\vec{\boldsymbol{X}}))^{\mathrm{T}}\left(\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{L}}}{\partial\Delta\vec{\boldsymbol{X}}}\right)^{\mathrm{T}}+\\(\delta(\Delta\vec{\boldsymbol{Y}}))^{\mathrm{T}}\left(\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{L}}}{\partial\Delta\vec{\boldsymbol{Y}}}\right)^{\mathrm{T}}+(\delta(\Delta\vec{\boldsymbol{Z}}))^{\mathrm{T}}\left(\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{L}}}{\partial\Delta\vec{\boldsymbol{Z}}}\right)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}=\\&\begin{pmatrix}(\boldsymbol{C}\delta\vec{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}(\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_x))^{\mathrm{T}}+\\(\boldsymbol{C}\delta\vec{\boldsymbol{Y}})^{\mathrm{T}}(\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_y))^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{C}\delta\vec{\boldsymbol{Z}})^{\mathrm{T}}(\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_z))^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}=\\&\delta\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_x)\vec{\boldsymbol{\beta}}+\delta\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_y)\vec{\boldsymbol{\beta}}+\\&\delta\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_z)\vec{\boldsymbol{\beta}}\end{aligned}\tag{9}$$

由式(1)、(2)知 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_x)\vec{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{A}_x\vec{\boldsymbol{\beta}}=0$，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_y)\vec{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{A}_y\vec{\boldsymbol{\beta}}=0$，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_z)\vec{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{A}_z\vec{\boldsymbol{\beta}}=0$，代入上式(8)可得 $\delta\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}=0$.

记结构自应力矩阵 $\boldsymbol{B}$(由自应力模态向量组成)，结构独立自应力模态组合系数 $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_d$，单元内力 $\vec{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{B}\vec{\boldsymbol{\gamma}}_d$，则有 $\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}}=0\Rightarrow\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\vec{\boldsymbol{\gamma}}_d=0\Rightarrow\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=0$. 一阶变分第二项 $\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\vec{\boldsymbol{\beta}}=\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\cdot\delta(\boldsymbol{B}\vec{\boldsymbol{\gamma}}_d)=\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\delta}\vec{\boldsymbol{\gamma}}_d=0$ 则有，形态生成泛函一阶变分：

$$\delta(\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}})=\delta\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}+\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\vec{\boldsymbol{\beta}}=0+0=0 \tag{10}$$

### 3.2　二阶变分

接下来，对于二阶变分

$$\delta^2(\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}})=\delta\begin{pmatrix}\delta\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_x)+\\ \delta\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_y)+\\ \delta\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_z)\end{pmatrix}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}=$$

$$\begin{pmatrix}\delta^2\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_x)+\delta^2\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_y)+\\ \delta^2\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_z)+\delta\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\delta(\cos\vec{\alpha}_x))+\\ \delta\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\delta(\cos\vec{\alpha}_y))+\delta\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\delta(\cos\vec{\alpha}_z))\end{pmatrix}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}} \tag{11}$$

其中

$$\begin{pmatrix}\delta^2\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_x)+\\ \delta^2\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_y)+\\ \delta^2\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\cos\vec{\alpha}_z)\end{pmatrix}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}=\delta^2\begin{Bmatrix}\vec{\boldsymbol{X}}\\ \vec{\boldsymbol{Y}}\\ \vec{\boldsymbol{Z}}\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_x\\ \boldsymbol{A}_y\\ \boldsymbol{A}_z\end{bmatrix}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}=0$$

则有

$$\delta^2(\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}})=\begin{pmatrix}\delta\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\delta(\cos\vec{\alpha}_x))+\\ \delta\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\delta(\cos\vec{\alpha}_y))+\\ \delta\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\delta(\cos\vec{\alpha}_z))\end{pmatrix}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}=$$

$$\delta\begin{Bmatrix}\vec{\boldsymbol{X}}\\ \vec{\boldsymbol{Y}}\\ \vec{\boldsymbol{Z}}\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\left[\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C} & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C} & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}_x\\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}_y\\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{C} & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}\right]\delta\begin{Bmatrix}\vec{\boldsymbol{X}}\\ \vec{\boldsymbol{Y}}\\ \vec{\boldsymbol{Z}}\end{Bmatrix} \tag{12}$$

$\boldsymbol{H}_x,\boldsymbol{H}_y,\boldsymbol{H}_z$ 由构件对 $x$、$y$、$z$ 轴方向余弦组成，它们在形式上类似. 其中

$$\boldsymbol{H}_x=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos^2\alpha_{1x} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cos^2\alpha_{2x} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cos^2\alpha_{nx}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \begin{bmatrix}\cos\alpha_{1x}\cos\alpha_{1y} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cos\alpha_{2x}\cos\alpha_{2y} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cos\alpha_{nx}\cos\alpha_{ny}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \begin{bmatrix}\cos\alpha_{1x}\cos\alpha_{1z} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cos\alpha_{2x}\cos\alpha_{2z} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cos\alpha_{nx}\cos\alpha_{nz}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

## 4　算　例

### 4.1　算例 1

以下提供的算例为一种简单具体的三棱柱张拉整体结构形态，旨在验证其通过构件内力表示的形态生成泛函.

在无外荷载作用下，三棱柱张拉整体结构在上下底面相对旋转角为 $\theta=5\pi/6$ 时[17]，存在自应力模态. 如图 2 所示，其中假定高度 $H=10$，上下底面正三角形外接圆半径 $R=5$.

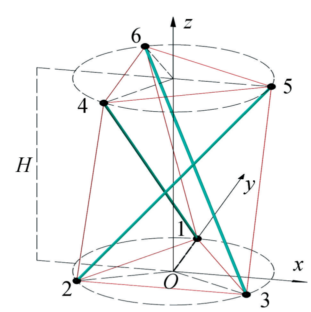


图 2　三棱柱张拉整体结构形态

Fig. 2　Tensegrity structural morphology of triangular prism

各节点的坐标为

$\boldsymbol{n}_1=[0,5,0]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{n}_2=[-5\cos(\pi/6),-5\sin(\pi/6),0]^{\mathrm{T}}=[-5\sqrt{3}/2,-5/2,0]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{n}_3=[5\cos(\pi/6),-5\sin(\pi/6),0]^{\mathrm{T}}=[5\sqrt{3}/2,-5/2,0]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{n}_4=[-5\sin(5\pi/6),5\cos(5\pi/6),10]^{\mathrm{T}}=[-5/2,-5\sqrt{3}/2,10]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{n}_5=[-5\sin(3\pi/2),5\cos(3\pi/2),10]^{\mathrm{T}}=[5,0,10]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{n}_6=[-5\sin(13\pi/6),5\cos(13\pi/6),10]^{\mathrm{T}}=[-5/2,5\sqrt{3}/2,10]^{\mathrm{T}}$

三棱柱张拉整体结构中，各构件单元的编号、长度以及自平衡状态下各单元的自应力模态已详细列示于下表 1. 以构件内力表示该三棱柱张拉整体结构的形态生成泛函为：

$\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}}=13.903\ 3\times(-0.429\ 1)\times3+8.660\ 3\times0.154\ 3\times6+10.329\ 5\times0.318\ 8\times3=-17.90+8.02+9.88=0$

表 1　三棱柱张拉整体结构的相关信息

Table 1　Information about triangular prism tensegrity module

| 编号 | 起点 | 终点 | 单元长度 | 自应力模态 |
|---|---|---|---|---|
| ① | 1 | 4 | 13.903 3 | －0.429 1 |
| ② | 2 | 5 | 13.903 3 | －0.429 1 |
| ③ | 3 | 6 | 13.903 3 | －0.429 1 |
| ④ | 1 | 2 | 8.660 3 | 0.154 3 |
| ⑤ | 2 | 3 | 8.660 3 | 0.154 3 |
| ⑥ | 1 | 3 | 8.660 3 | 0.154 3 |
| ⑦ | 4 | 5 | 8.660 3 | 0.154 3 |
| ⑧ | 5 | 6 | 8.660 3 | 0.154 3 |
| ⑨ | 4 | 6 | 8.660 3 | 0.154 3 |
| ⑩ | 1 | 6 | 10.329 5 | 0.318 8 |
| ⑪ | 2 | 4 | 10.329 5 | 0.318 8 |
| ⑫ | 3 | 5 | 10.329 5 | 0.318 8 |

无外荷载作用，则 $\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x+\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_y+\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_z=0$ 即，$\Gamma(\vec{\boldsymbol{L}},\vec{\boldsymbol{\beta}})=\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}}-(\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x+\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_y+\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_z)=0-0=0$.

此结果与 2.1 节的推导一致. 与之等价的以力密度表示的形态生成泛函，亦可验证.

### 4.2　算例 2

形态生成泛函不仅适用于张拉整体结构，对于非张拉整体结构同样适用. 以下提供一个简单的静定结构形态算例，如图 3 所示.

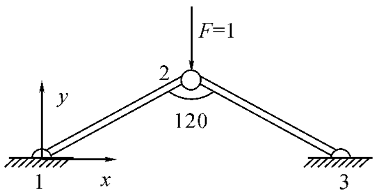


图 3　静定结构形态

Fig. 3　Statically determinate structural morphology

假定杆长为 2，则有 $\vec{\boldsymbol{L}}=\{2,2\}^{\mathrm{T}}$，各点坐标为 $\boldsymbol{n}_1=[0,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{n}_2=[\sqrt{3},1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{n}_3=[2\sqrt{3},0]^{\mathrm{T}}$. 体系生成过程中考虑外荷载 $F=1$，则杆件内力矢量为 $\vec{\boldsymbol{\beta}}=\{-1,-1\}^{\mathrm{T}}$. 以构件内力表示该静定结构的形态生成泛函为：

$$\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}}=2\times(-1)+2\times(-1)=-4$$

$$\{\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\ \ \vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\}\begin{Bmatrix}\vec{\boldsymbol{F}}_x\\ \vec{\boldsymbol{F}}_y\end{Bmatrix}=\{0\ \ \sqrt{3}\ \ 2\sqrt{3}\ \ 0\ \ 1\ \ 0\}\begin{Bmatrix}\sqrt{3}/2\\ 0\\ -\sqrt{3}/2\\ 1/2\\ -1\\ 1/2\end{Bmatrix}=-4$$

即 $\Gamma(\vec{\boldsymbol{L}},\vec{\boldsymbol{\beta}})=\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}}-(\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x+\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_y)=-4-(-4)=0$

在不考虑外载荷或者外载荷为零时，该结构体系显然满足形态生成泛函.

## 5　结　论

本文提出了张拉整体形态形成过程的控制泛函，定义以构件内力表示的形态生成泛函 $\Gamma(\vec{\boldsymbol{L}},\vec{\boldsymbol{\beta}})=\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{\beta}}-(\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x+\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_y+\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_z)$，以构件力密度表示的形态生成泛函 $\Pi(\vec{\boldsymbol{L}},\vec{\boldsymbol{q}})=\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\vec{\boldsymbol{L}}-(\vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_x+\vec{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_y+\vec{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{F}}_z)$，$\vec{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}$ 可视为 $(\vec{\boldsymbol{L}}-\boldsymbol{0})^{\mathrm{T}}$ 用于表示形态生成过程，$\boldsymbol{0}$ 为起点. 形态生成泛函描述了结构形态从无到有的自由生成过程，以及形状几何的演变. 在外荷载作用下，该泛函表明在形态生成到平衡态过程中，内力所做的总功等于外力所做的总功. 在不考虑外荷载或外荷载为零的自平衡状态下，受拉构件长度与其自应力的乘积之和等于受压构件长度与其自应力的乘积之和.

形态生成泛函在结构体系形态问题的研究中具有重要意义，它是结构形态生成过程中始终遵循的基本原则. 作者认为该泛函不仅适用于张拉整体结构形态，还适用于非张拉整体结构形态.

## 参考文献

[1] FULLER R B. Tensile-integrity structures: US 3063521 [P], 1962.

[2] SNELSON K D. Continuous tension discontinuous compression structures: US 3169611 [P], 1965.

[3] GLUCK H. Almost all simply connected closed surfaces are rigid [J]. Lecture Notes in Mathematics, 1975, 438(1): 225-239.

[4] CONNELLY R. Rigidity and energy [J]. Inventiones Mathematicae, 1982, 66(1): 11-33.

[5] KAZUMA G, NOGUCHI H. Form finding analysis of tensegrity structures based on variational method [C]// Proceedings of the 4th CJK Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems, Kunming, China, 2006: 455-460.

[6] HANAOR A, LIAO M K. Double-layer tensegrity grids: static load response. Part I: analytical study [J]. Journal of Structural Engineering, 1991, 117(6): 1660-1674.

[7] HANAOR A. Aspects of design of double-layer tensegrity domes [J]. International Journal of Space Structures, 1992, 7(2): 101-113.

（下转第 79 页）

Research Institute：Baltimore，MD，USA，1998：211.

[6] MEIER H，MEIER U. BRÖNNIMANN R. Zwei CFK-Kabel für die Storchenbrücke [J]. Schweiz. Ing. Archit. 1996，114：980-985.

[7] MEIER U. Structural tensile elements made of advanced composite materials [J]. Structural Engineering International，1999，9(4)，281-285.

[8] 吕志涛，梅葵花. 国内首座 CFRP 索斜拉桥的研究[J]. 土木工程学报，2007，40(1)：54-59.
LV Zhi-tao，MEI Kui-hua. Research on the first CFRP cable-stayed bridge in China[J]. China Civil Engineering Journal，2007，40(1)：54-59.

[9] 牛延沼，李承高，咸贵军，等. CFRP 拉索变刚度黏结型锚固系统受力性能研究[J]. 建筑结构学报，2024，45，(3)：220-231.
NIU Yan-zhao，LI Cheng-gao，XIAN Gui-jun，et al. Mechanical properties of CFRP cable bonded anchorage system with variable stiffness [J]. Journal of Building Structures，2024，45(3)：220-231.

[10] 吴智深，汪昕，吴刚. FRP 增强工程结构体系[M]. 北京：科学出版社，2017：71
WU Zhi-shen，WANG Xin，WU Gang. FRP reinforced engineering structure system [M]. Beijing：Science Press，2017：71.

[11] 王安妮，刘晓刚，岳清瑞. 碳纤维复合材料拉索的锚固体系及服役性能研究进展[J]. 建筑结构学报，2022，43(9)：45-54.
WANG An-ni，LIU Xiao-gang，YUE Qing-rui. Research progress on anchorage system and service performance of carbon fiber composite cables[J]. Journal of Building Structures，2022，43(9)：45-54.

[12] ASTM D7205/D7205M-21. Standard test method for tensile properties of fiber reinforced polymer matrix composite bars [S].

[13] 范重，李夏，晁江月，等. 航站楼使用阶段钢结构温度取值研究[J]. 建筑科学与工程学报，2017，34(4)：9-18.
FAN Zhong，LI Xia，CHAO Jiang-yue，et al. Research on temperature value of steel structure in terminal building[J]. Journal of Building Science and Engineering，2017，34(4)：9-18.

[14] 盛一安，王柏生. 钢结构构件日照温度场和温度作用取值研究[J]. 低温建筑技术，2021，43(6)：52-57.
SHENG Yi-an，WANG Bai-sheng. Study on sunshine temperature field and temperature effect of steel structure components[J]. Low Temperature Building Technology，2021，43(6)：52-57.

（上接第 70 页）

[8] HANAOR A. Geometrically rigid double-layer tensegrity grids [J]. International Journal of Space Structures，1994，9(4)：227-238.

[9] MOTRO R. Forms and forces in tensegrity systems [C] // Proceedings of Third International Conference on Space Structures，Amsterdam Elsevier，1984.

[10] MOTRO R，NAJARI S，JOUANNA P. Static and dynamic analysis of tensegrity systems [C] // Shell and Spatial Structures：Computational Aspects. Proceedings of the International Symposium，1986，26：270-279.

[11] ROTH B，WHITELEY W. Tensegrity frameworks [J]. Trans，1981，265(2)：419-446.

[12] CONNELLY R，WHITELEY W. The stability of tensegrity frameworks [J]. International Journal of Space Structures，1992，7(2)：153-163.

[13] CONNELLY R，WHITELEY W. Second-order rigidity and prestress stability for tensegrity frameworks [J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics，1996，9(3)：453-491.

[14] CONNELLY R，TERRELL M. Globally rigid symmetric tensegrities [J]. Topology Structural，1995，21(6)：59-78.

[15] VASSART N，MOTRO R. Multiparametered form finding method：application to tensegrity systems [J]. International Journal of Space Structures，1999，14(2)：147-154.

[16] DAVIDE C，ANDREA M. Structural performances of single-layer tensegrity domes [J]. International Journal of Space Structures，2012，27(2&3)：167-178.

[17] 陈志华，刘锡良. 张拉整体三棱柱单元体结构分析 [J]. 天津大学学报，2000，33(1)：89-93.
CHEN Zhi-hua，LIU Xi-liang. Study on tensegrity structures of triangular prism unit [J]. Journal of Tianjin University，2000，33(1)：89-93.